

УДК 534.121.1

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЛАСТИНЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.М. Камалутдинов, А.Г. Егоров, В.Н. Паймушин, В.А. Фирсов

Аннотация

Предлагается новый метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления пластины, гармонически колеблющейся в вязкой несжимаемой жидкости. Он основан на прямом измерении амплитудных значений прогибов консольно закрепленных плоских балок при их затухающих колебаниях по первой моде и решении обратной задачи вычисления коэффициента сопротивления по найденному в эксперименте логарифмическому декременту колебаний балки.

Ключевые слова: свободные механические колебания, коэффициент сопротивления, вязкая несжимаемая жидкость, демпфирование.

1. Введение

Одним из наиболее опасных режимов динамического деформирования конструкций является резонансный, реализующийся в конструкции при совпадении частот ее собственных колебаний с частотой внешнего циклического воздействия. При таком режиме нагружения, как известно, многократно возрастают амплитудные значения параметров динамического напряженно деформированного состояния. Корректное и достоверное их теоретическое определение с необходимой для практических целей точностью требует надлежащего учета в расчетных соотношениях демпфирующих свойств материалов конструкции, обусловленных внутренним трением. Методам их определения и построению для их описания соответствующих математических моделей к настоящему времени посвящена обширная научная литература (см., например, [1–3]). Один из современных методов предлагает измерять демпфирующие свойства материала путём исследования затухающих изгибных колебаний консольно закрепленных плоских тест-образцов [4]. При таком подходе важно уметь выделять аэродинамическую составляющую демпфирования, связанную с взаимодействием тест-образца с окружающей средой (вода, воздух) [4, 5].

В общем случае задача учета действующих на консольно-закрепленную балку аэродинамических сил чрезвычайно сложна главным образом из-за сложности трехмерных течений газа, вызванных колебанием балки. Известные подходы [6, 7] к ее решению основываются на предположении, что длина балки L существенно превышает ее ширину b и толщину h . В этом случае на низких структурных модах колебаний длина вибрационной волны значительно больше отклонений балки, в силу чего балка может рассматриваться как локально плоская. При этом трехмерными явлениями, относящимися к течению газа вдоль оси балки, в том числе сходом вихрей с ее торца, пренебрегают, определяя аэродинамические силы

в каждом сечении балки путем изучения плоского движения газа, вызванного гармоническими осцилляциями тонкой жесткой пластины. Такая пластина описывает поперечное сечение балки и выступает для окружающей среды в роли подвижной твердой границы. Таким образом, задача определения аэродинамического сопротивления пластины оказывается непосредственным образом связанной с задачей выделения аэродинамической компоненты в логарифмическом декременте колебаний консольно закрепленной балки.

Указанное обстоятельство позволяет в принципе определить зависимость коэффициента сопротивления пластины от амплитуды и частоты ее колебаний по найденному из экспериментов декременту колебаний балки. Трудности при таком подходе заключается в наличии вклада в декремент колебания не только аэродинамических, но и внутренних сил трения пластины, в общем случае зависящих от амплитуды колебаний. Такие зависимости в большинстве случаев достоверно не известны. Более того, указанный выше метод [4] исследования затухающих изгибных колебаний консольно закрепленных тест-образцов и предназначен собственно для нахождения внутреннего демпфирования материала, из которого изготовлен образец. Указанные трудности снимаются при использовании дюралюминевых пластинок, для которых, как хорошо известно [8] внутреннее трение не зависит от амплитуды колебаний.

2. Экспериментальные измерения

Для измерения декремента колебания гармонически колеблющейся пластины была создана специальная экспериментальная установка, схема которой представлена на рис.1. Она состоит из основания 1 и силовой стенки 2, жестко соединенных между собой. На стенке консольно закрепляется испытуемая дюралюминевая пластина 3. Защемление осуществляется с помощью разнесенных планок, соединяемых со стенкой двумя рядами болтовых соединений и исключающих поворот испытуемой пластины в сечении заделки. На основании также установлена стойка 4 для крепления лазерного датчика перемещений 5, положение которой вдоль основания может изменяться для измерения амплитуды колебаний точек тест-образца при изменении его стрелы вылета.

В экспериментальной установке используется триангуляционный лазерный датчик фирмы RIFTEK (RF603-X/100), обеспечивающий точность измерения амплитуды колебаний 0,01мм. Результаты измерений в цифровом формате поступают на персональный компьютер.

После начального отклонения пластин от положения равновесия они совершали свободные затухающие изгибные колебания. Замеры начинались с некоторой задержкой по времени, необходимой для перехода из начального (статического) изогнутого состояния на основную низшую форму колебаний образца. Значения амплитуды A колебаний точки на конце пластины фиксировались в течение большого (до тысячи) числа циклов, пока отклонения пластины от равновесия еще допускали достаточно точные измерения.

Как показывают эксперименты, частота колебаний пластины ω слабо изменяется со временем вблизи собственной частоты ω_0 , а амплитуда A колебаний конца пластины медленно затухает со временем t из-за сопротивления воздуха и внутреннего трения. Затухание колебаний описывают с помощью логарифмического декремента колебания $\delta = -2\pi\omega_0^{-1}A^{-1}(dA/dt)$. По найденной в экспериментах виброграмме определяют, как это описано в [4], частота ω_0 , текущие амплитуда $A(t)$ и логарифмический декремент $\delta(t)$ колебаний. В результате строится зависимость $\delta(A, \omega_0)$ декремента от частоты и амплитуды колебаний. В экспериментах

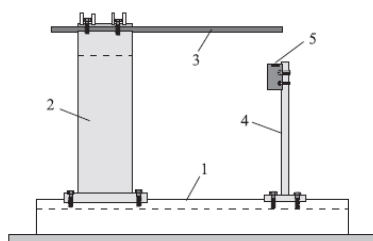


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

использовались дюралюминевые пластины толщиной $h = 0,95$ мм., шириной b от 10 до 30 мм. и со стрелой вылета L , изменяемой от 150 до 300 мм. (рис. 2а) с шагом 10 мм. Как видно во всех случаях выполнялось условие $h \ll b \ll L$. В данной работе мы представим результаты, относящиеся лишь к случаю $b = 10$ мм.

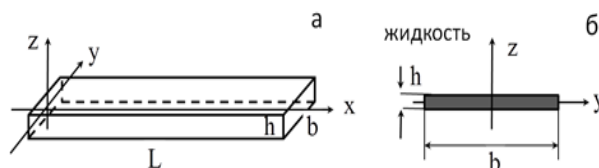


Рис. 2. (а) обозначения в задаче о вибрации пластины и (б) схема плоской гидродинамической задачи.

Типичные измеренные зависимости δ от безразмерной амплитуды колебаний $\kappa = A/b$ при различных длинах L пластинки, полностью определяющих частоту ω_0 ее основной моды колебаний, представлены на рис. 3. Соответствующие частоты ω_0 составляют 28, 13.9 и 9.2 Гц при $L = 170, 230, 290$ мм.

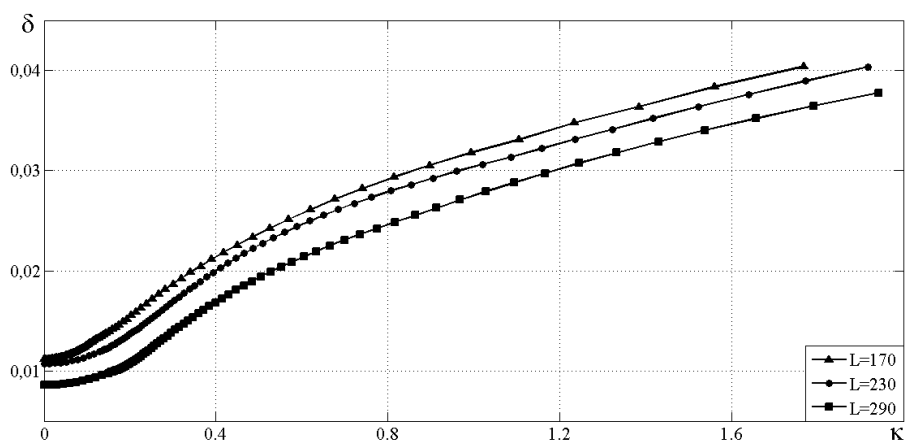


Рис. 3. Зависимость логарифмического декремента от безразмерной амплитуды колебания.

3. Определение коэффициента сопротивления.

Учитывая малость сил внутреннего трения и аэродинамических сил по сравнению с упругими силами можно показать [5], что (а) логарифмический декремент затухания складывается из двух независимых частей, отвечающих внутреннему (δ_H) и аэродинамическому (δ_A) демпфированию

$$\delta = \delta_H + \delta_A,$$

(б) аэродинамический декремент δ_A колебаний связан с локальным (в сечении x) коэффициентом $C(\xi)$, $\xi = x/L$ (см. рис. 2б), аэродинамического сопротивления колеблющейся плоской пластины соотношением

$$\delta_A = \frac{4}{3} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{A}{h} \frac{\langle CW^3 \rangle}{\langle W^2 \rangle} \quad (1)$$

где угловыми скобками обозначается среднее по длине пластины, а $W(\xi)$ ($W(1) = 1$) представляет собой профиль основной моды колебаний в отсутствие сил внутреннего трения и аэродинамических сил

$$W(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} k \xi - \cos k \xi) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} k + \cos k}{\operatorname{sh} k + \sin k} (\operatorname{sh} k \xi - \sin k \xi).$$

Величина $k = 1.8751$ в этой формуле вычисляется как наименьший положительный корень уравнения $\cos k \operatorname{ch} k = -1$ и определяет главную частоту собственных колебаний пластины

$$\omega_0 = k^2 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}$$

Важно отметить, что согласно [8] внутреннее демпфирование δ_H , в отличие от внешнего δ_A не зависит от амплитуды колебаний A . Именно это обстоятельство позволяет выделить аэродинамическую компоненту декремента затухания и подсчитать по ней коэффициент C сопротивления колеблющейся пластины.

Из анализа размерностей ясно, что безразмерный коэффициент сопротивления $C(\xi)$, в сечении ξ пластины должен зависеть от трех безразмерных параметров. Один из них

$$\Delta = \frac{h}{b}$$

задает форму пластины. Два других

$$\beta = \frac{b^2 \omega_0}{2\pi\nu}, \quad \kappa(\xi) = \frac{AW(\xi)}{b}$$

определяют соответственно параметр Стокса и (с точностью до множителя 2π) параметр Кулегана-Карпентера. Через ν здесь обозначена кинематическая вязкость воздуха.

Коэффициент аэродинамического сопротивления пластины обычно раскладывают [5, 7] на сумму двух составляющих – вязкой (C_{vis}) и вихревой (C_{vort})

$$C = C_{\text{vis}} + C_{\text{vort}}$$

Соответственно, аэродинамический декремент колебания пластины представляется в виде

$$\delta_A = \delta_A^{\text{visc}} + \delta_A^{\text{vort}}.$$

Вязкий аэродинамический декремент колебания δ_A^{visc} является вкладом вязкой составляющей аэродинамического сопротивления пластины C_{vis} в декремент колебания. Его влияние сказывается главным образом при малоамплитудных колебаниях, когда преобладают вязкие эффекты. Для его учета принимают аналитическую формулу Стокса

$$C_{\text{vis}} = \frac{4.61}{\kappa \sqrt{\beta}}.$$

При этом вязкий аэродинамический декремент колебания согласно (1) можно записать в виде

$$\delta_A^{\text{vis}} = \frac{6.14}{\sqrt{\beta}} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{b}{h} = 6.14 \frac{\rho_a}{\rho h} \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\omega_0}}.$$

Как видно, δ_A^{vis} зависит лишь от частоты колебания ω_0 но ни от ширины пластины b , ни от амплитуды ее колебания A .

Вихревой аэродинамический декремент колебания (δ_A^{vort}), представляет собой вклад вихревой составляющей аэродинамического сопротивления пластины C_{vort} в декремент колебания. С ростом безразмерной амплитуды колебаний пластины картина течения определяется срывом интенсивных вихрей с концов пластины. Вязкие эффекты играют вспомогательную роль (ибо не они, а исключительно геометрия определяет место схода вихрей). Соответственно единственный параметр β , содержащий вязкость, перестает быть определяющим, а гидродинамические коэффициенты становятся при фиксированном Δ лишь функцией безразмерной амплитуды колебаний κ .

Очевидно, что при $\kappa \rightarrow 0$ вихревая составляющая аэродинамического сопротивления C_{vort} исчезает. Поэтому при $\kappa = 0$ вклад в общий логарифмический декремент колебания вносят лишь внутреннее и вязкое демпфирование. Но, как отмечалось выше, ни то, ни другое не зависят от амплитуды колебаний пластины. Это позволяет определить вихревую составляющую аэродинамического декремента колебаний по измеренному в экспериментах декременту $\delta(\kappa)$ как

$$\delta_A^{\text{vort}} = \delta(\kappa) - \delta(0)$$

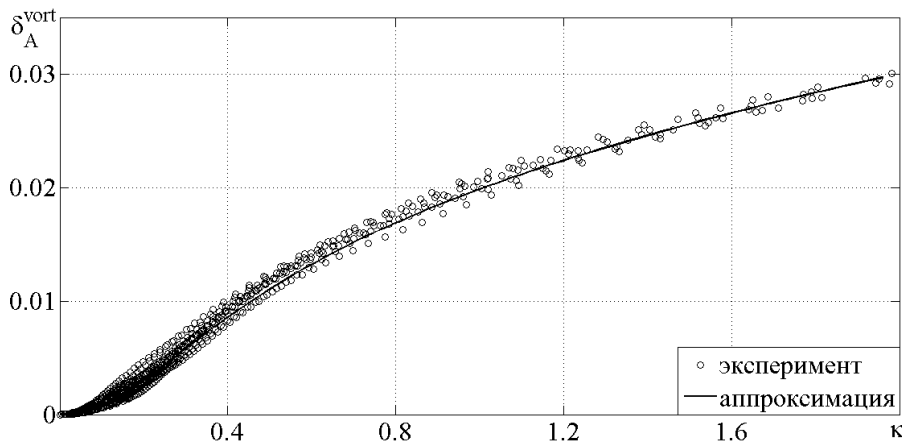


Рис. 4. Зависимость вклада в декремент колебания вихревой составляющей коэффициента сопротивления от безразмерной амплитуды колебания.

Из общих соображений следует ожидать, что определенные таким образом зависимости $\delta_A^{\text{vort}}(\kappa)$ будут слабо зависеть от параметра Стокса β . Это подтверждают

графики Рис. 4, где представлены вихревые составляющие декремента колебания пластины для образцов различной длины $L = 150 \div 300$ мм., собственная частота колебаний которых изменялась от 8 до 30 Гц. Как видно, все экспериментальные точки группируются вокруг одной кривой (сплошная линия), которая с высокой точностью может быть аппроксимирована выражением

$$\delta_A^{\text{vort}} = 37 \frac{b}{h} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{\kappa^{2.3}}{1 + 7.56\kappa^{1.85}}$$

Зная δ_A^{vort} можно найти вихревой коэффициент сопротивления, решив интегральное уравнение (1). Не останавливаясь на деталях этой процедуры, приведем простое приближенное решение, отличающее от точного не более, чем на 3%

$$C_{\text{vort}} = 63 \frac{\kappa^{1.38}}{1 + 14.8\kappa^{1.91}}$$

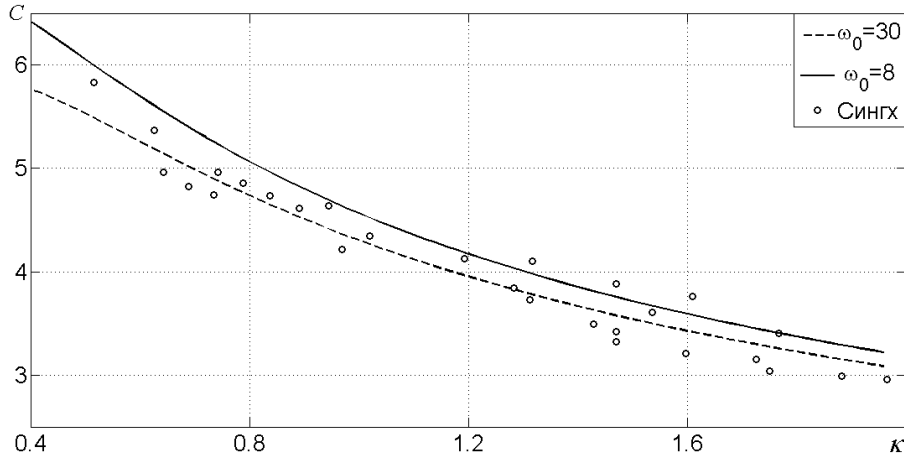


Рис. 5. Зависимость коэффициента сопротивления пластины от безразмерной амплитуды колебания.

На Рис. 5 представлен график зависимости $C = C_{\text{vis}} + C_{\text{vort}}$ от безразмерной амплитуды колебаний κ . Линиями изображены предельные значения для C соответствующие различным значениям частот (сплошная линия - 8 Гц пунктир - 30 Гц). Маркерами даны полученные иным способом экспериментальные результаты Сингха [9]. Как видно наши результаты с хорошей точностью согласуются с известными экспериментальными данными.

4. Заключение

Разработан теоретико-экспериментальный метод определения коэффициента сопротивления пластин, совершающих гармонические колебания в вязкой среде, на основе анализа виброграмм затухающих изгибных колебания пластин. Полученные результаты хорошо согласуются с известными данными, полученными иным способом.

Работа выполнена в рамках федеральной программы РНФ «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» на 2014-2016 гг., по теме «Фундаментальные и прикладные проблемы акустоупругости тонкостенных элементов конструкций с приложениями к задачам звукоизоляции и виброзащиты» (№ 14-19-00667).

Summary

A.M. Kamalutdinov, A.G. Egorov, V.N. Paimushin, V.A. Firsov. Theoretical-experimental method for determining the drag coefficient of the plate performs harmonic oscillations in a viscous incompressible fluid. New method for determining the drag coefficient of harmonically oscillating in a viscous incompressible fluid plate are proposed. It is based on direct measurement of the amplitude values of deflections of cantilevered flat beams with their damped oscillations in the first mode and the solution of the inverse problem of calculating the drag coefficient from the experiment of the logarithmic decrement of the beam.

Key words: free mechanical vibrations, the drag coefficient, viscous incompressible fluid, damping.

Литература

1. Давиденков Н. Н. О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. – 1938. – Т. 8, вып. 6. – С. 483–499.
2. Дубенец В. Г., Хильчевский В. В. Колебания демпфированных композитных конструкций. – Киев: Вища школа, 1995. – 210 с.
3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
4. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Егоров А.Г. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. – 2014. –Т. 50, No 2. – С. 185–198.
5. Егорова А.Г., Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н., Паймушин В.Н. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 2. Аэродинамическая составляющая демпфирования // Механика композит. материалов. – 2014. –Т. 50, No 3. – С. 379–396.
6. Sader J. E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // J. Appl. Phys. – 1998. –Vol. 84, No 1. – P. 64–76.
7. Aureli M. and Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // Appl. Phys. Lett. – 2010. – Vol. 96. – Art. 164102.
8. Adams R.D. The damping characteristics of certain steels, cast Irons and other metals //Journal of Sound and Vibration –1972. –Vol. 23, No 2, – P. 199–216.
9. Singh S. Forces on Bodies in Oscillatory Flow // PhD Thesis, University of London, 1979.

Сведения о каждом из авторов статьи

Камалутдинов Айрат Марсович – аспирант кафедры аэрогидромеханики института математики и механики им.Н.И.Лобачевского КФУ

E-mail: islamui@hotmail.com

Егоров Андрей Геннадьевич – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой аэрогидромеханики института математики и механики им.Н.И.Лобачевского КФУ

E-mail: aegorov0@gmail.com

Паймушин Виталий Николаевич – д.ф.-м.н., главный научный сотрудник Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ)

E-mail: vpajmushin@mail.ru

Фирсов Вячеслав Анатольевич – д.т.н., профессор Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ)

E-mail: vafirsov_49@mail.ru